

© 2024 г. М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)  
(Научно-технологический университет «Сириус», Сочи),  
А.В. СТЕПАНОВ (andrey8st@yahoo.com)  
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

## КАК УЛУЧШИТЬ РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМОЙ С ПОМОЩЬЮ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ<sup>1</sup>

Показано, что робастное управление, построенное только по априорной информации о неопределенности в объекте, может быть значительно улучшено за счет дополнительного использования экспериментальных данных. Излагается синтез обобщенных  $H_\infty$ -управлений неизвестной линейной нестационарной системой на конечном горизонте, которые оптимизируют уровни гашения внешнего и/или начального возмущений, а также максимальное отклонение терминального состояния системы. Метод не требует выполнения условия неисчезающего возбуждения или рангового условия, гарантирующих идентифицируемость системы, что позволяет значительно уменьшить объем экспериментальных данных.

*Ключевые слова:* линейная нестационарная система, неопределенность, робастное управление, обобщенная  $H_\infty$ -норма, двойственность, условие неисчезающего возбуждения, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231024060086, EDN: XWPXEE

### 1. Введение

В настоящее время в теории управления активно развиваются методы синтеза робастных законов управления с использованием данных, полученных в предварительном эксперименте. Традиционные методы базировались в основном на использовании только априорной информации. Применение экспериментальных данных значительно сужает множество объектов, выделяемых на основе априорной информации, что в конечном итоге позволяет синтезировать более качественное управление. Для систем с параметрической неопределенностью большое место занимают методы синтеза робастного управления, основанные на применении теории  $H_\infty$ -оптимального управления (см., например, обзор [1]). Основная идея, лежащая в основе этих методов, состоит в том, что исходная неопределенная система представляется в виде двух подсистем, связанных обратной связью: одна подсистема известна, а другая содержит матрицу неизвестных параметров объекта (в англоязычной литературе такая модель называется «linear fractional transformation model» или сокращенно «LFT model»). Дополнительные вход и выход известной подсистемы, являющиеся соответственно выходом и входом неизвестной подсистемы,

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 24-11-20023).

называются входом и выходом неопределенности. Если априорная информация выражается квадратичным неравенством относительно матрицы неизвестных параметров, то вход и выход неопределенности удовлетворяют соответствующему квадратичному неравенству. Таким образом, исходная система с параметрической неопределенностью «погружается» в известную систему, содержащую дополнительное возмущение из заданного класса и называемую далее расширенной. В итоге в качестве робастного управления, минимизирующего заданный функционал, выбирается соответствующее минимаксное управление для расширенной системы против внешнего и дополнительного возмущений.

В синтезе законов управления по экспериментальным данным предполагается, что возмущения в объекте или помехи в измерениях при проведении экспериментов принадлежат некоторому классу и имеют определенные границы. Это позволяет судить об области неопределенных параметров объекта, которые могли бы генерировать полученные данные. Однако непосредственное перенесение описанного выше синтеза робастного управления оказалось затруднительным, так как получаемое при использовании экспериментальных данных неравенство является квадратичным относительно транспонированной матрицы неизвестных параметров. Как будет показано далее, это препятствие можно обойти, если от исходной неопределенной системы перейти к двойственной системе и характеризовать оптимизируемый функционал в терминах двойственной системы.

В связи с возникшей трудностью появились новые подходы. В [2] робастное управление для линейных стационарных систем в отсутствие возмущений и помех в измерениях строится на основе параметризации в терминах экспериментальных данных множества всех матриц замкнутой системы, согласованных с экспериментальными данными. Этот подход в [3] распространяется для систем с возмущением, а в [4] – для линейных нестационарных систем с возмущением. В [5] необходимые и достаточные условия робастной стабилизации получены на основе леммы Питерсена [6]. В [7] показано, что робастное  $H_2$ -управление по экспериментальным данным при достаточно малых амплитудах возмущений может быть улучшено за счет компромисса между целями управления и идентификации, достигаемого путем регуляризации функционала.

К экспериментальным данным в этих работах предъявляются определенные требования: для стационарных систем матрица, составленная из измерений состояний и управлений по траектории системы, должна быть максимального строчного ранга, а для нестационарных систем матрицы, составленные из измерений состояний и управлений в нескольких экспериментах, в каждый момент времени также должны иметь максимальный строчный ранг. Для выполнения этого рангового условия требуется, чтобы входные сигналы в экспериментах обеспечили неисчезающее возбуждение в системе, а в нестационарных системах это еще и требует проведение достаточно боль-

шого числа экспериментов, необходимых для идентифицируемости неизвестных параметров.

В [8, 9] для стационарных систем без возмущений и с возмущениями получены необходимые и достаточные условия информативности экспериментальных данных по отношению к синтезируемому закону управления, при которых существует единая линейная стационарная обратная связь для всех объектов, согласованных с экспериментальными данными. Эти условия получены при использовании матричного варианта  $S$ -леммы [10] и выражены в терминах линейных матричных неравенств (ЛМН), зависящих только от экспериментальных данных. Результаты математического моделирования, в том числе и приведенные в [9], показывают, что уже при сравнительно небольших амплитудах помех в измерениях указанные ЛМН дают довольно грубую оценку соответствующему показателю качества системы или даже оказываются неразрешимыми. Это происходит по причине того, что с ростом амплитуды помехи множество объектов, согласованных с экспериментальными данными, значительно расширяется. И хотя формально для обеспечения информативности данных не требуется исчезающее возбуждение в системе, указанное множество может стать неограниченным даже при небольших амплитудах помех, если для экспериментальных данных не выполняется ранговое условие. Таким образом, синтез робастного управления, опирающийся только на экспериментальные данные, как и синтез на основе только априорной информации, имеет свои достоинства и недостатки. Поэтому кажется естественным объединить эти подходы, пусть даже при возможной консервативности получаемых результатов.

Первая попытка в этом направлении была предпринята в [11], где параметры обратной связи по состоянию для линейных стационарных систем и некоторых классов нелинейных систем находятся при совместном использовании априорных и экспериментальных данных на основе так называемой теории множителей [12]. В [13, 14] для стационарных систем на бесконечном горизонте было показано, что традиционные методы синтеза робастного управления по априорной информации, основанные на теории  $H_\infty$ -оптимизации, могут быть применены в синтезе обобщенного  $H_\infty$ -оптимального управления по экспериментальным и априорным данным, если от исходной системы перейти к двойственной. Для этого требуется обобщенную  $H_\infty$ -норму характеризовать в терминах квадратичной функции Ляпунова для двойственной системы, представить уравнения двойственной неопределенной системы в виде LFT модели с соответствующими неравенствами для входа и выхода неопределенности и в качестве робастного управления выбрать обобщенное  $H_\infty$ -оптимальное управление для гашения внешнего и дополнительного возмущений в известной подсистеме этой модели.

В настоящей работе эта идея распространяется на анализ и синтез оптимальных законов управления для полностью неопределенных нестационарных систем на конечном горизонте. Целями управления являются минимизация уровней гашения внешнего и/или начального возмущений, измеряемых

наихудшими значениями отношений квадратичных по состояниям и управлениям функционалов к «энергии» соответствующих возмущений, а также максимальное отклонение терминального состояния, измеряемое наихудшим значением отношения квадратичной формы терминального состояния к энергии возмущений. Все эти показатели выражаются в терминах обобщенной  $H_\infty$ -нормы линейной нестационарной системы на конечном горизонте. В отличие от [4] здесь не требуется выполнения рангового условия, что позволяет значительно уменьшить объем экспериментальных данных. На примере уравнения Матье будет продемонстрировано, что синтез робастного управления нестационарной системой может быть осуществлен даже при измерении одной траектории на конечном горизонте. Это достигается за счет совместного использования экспериментальных данных и априорной информации, где последняя играет регуляризирующую роль в тех случаях, когда происходит вырождение информационных матриц и система оказывается неидентифицируемой.

## 2. Постановка задачи

### 2.1. Экспериментальные данные

Рассмотрим неопределенную систему

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A_t x(t) + B_t u(t) + w(t), & x(0) &= x_0, \\ z(t) &= C_t x(t) + D_t u(t), & t &= 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

в которой  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – состояние,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  – управление,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – неизмеряемое возмущение,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  – целевой выход. Предполагается, что начальное состояние  $x_0$  и нестационарные матрицы системы  $A_t$ ,  $B_t$ ,  $C_t$  и  $D_t$  неизвестны. В общем плане требуется на основе информации, полученной из экспериментов, и априорной информации синтезировать линейные обратные связи по состоянию, которые оптимизируют различные показатели качества замкнутой системы: уровень гашения начальных и/или внешних возмущений на конечном горизонте и на бесконечном горизонте для стационарных систем, максимальное отклонение терминального состояния и др.

Информация о неизвестных матрицах системы (2.1) извлекается из конечного набора измерений ее траектории при  $t = 0, \dots, N$  в результате проведения  $L \geq 1$  экспериментов. А именно, допустим, что в  $l$ -м эксперименте получены измерения состояния системы  $x_{0,l}, x_{1,l}, \dots, x_{N,l}$  и целевого выхода  $z_{0,l}, \dots, z_{N-1,l}$  при выбранных управлениях  $u_{0,l}, \dots, u_{N-1,l}$  и некоторых неизвестных возмущениях  $w_{0,l}, \dots, w_{N-1,l}$ . Для каждого  $t = 0, \dots, N$  обозначим матрицы

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Phi_t &= (x_{t,1} \cdots x_{t,L}), & U_t &= (u_{t,1} \cdots u_{t,L}), \\ W_t &= (w_{t,1} \cdots w_{t,L}), & Z_t &= (z_{t,1} \cdots z_{t,L}), \end{aligned}$$

которые содержат соответствующие данные всех экспериментов в каждый момент времени. В силу уравнения объекта для этих матриц выполняется

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Phi_{t+1} &= A_t^{(real)} \Phi_t + B_t^{(real)} U_t + W_t, \\ Z_t &= C_t^{(real)} \Phi_t + D_t^{(real)} U_t, \end{aligned}$$

где  $A_t^{(real)}$ ,  $B_t^{(real)}$ ,  $C_t^{(real)}$  и  $D_t^{(real)}$  – реальные неизвестные матрицы уравнений системы. Обозначим

$$\Delta_t^{(real)} = \begin{pmatrix} A_t^{(real)} & B_t^{(real)} \\ C_t^{(real)} & D_t^{(real)} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\Phi}_t = \begin{pmatrix} \Phi_t \\ U_t \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Phi}_{t+1} = \begin{pmatrix} \Phi_{t+1} \\ Z_t \end{pmatrix}, \quad \widehat{W}_t = \begin{pmatrix} W_t \\ 0 \end{pmatrix}$$

и запишем уравнения (2.3) в виде линейной матричной регрессии

$$(2.4) \quad \widetilde{\Phi}_{t+1} = \Delta_t^{(real)} \widehat{\Phi}_t + \widehat{W}_t, \quad t = 0, \dots, N-1.$$

Представим общее предположение о возмущении в экспериментах в виде условия  $\sum_{l=1}^L w_{t,l} w_{t,l}^T = W_t W_t^T \leq \Omega_t$ , т.е.

$$(2.5) \quad \widehat{W}_t \widehat{W}_t^T \leq \begin{pmatrix} \Omega_t & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widehat{\Omega}_t.$$

В частности, если  $\sum_{l=1}^L |w_{t,l}|^2 \leq \alpha_t^2$ , то  $\Omega_t = \alpha_t^2 I$ . Если для всех  $t$  возмущение удовлетворяет ограничению  $\|w(t)\|_\infty \leq d_w$  для некоторого заданного  $d_w$ , которое будем называть уровнем возмущения, то  $\Omega_t = d_w^2 n_x L I$ .

*Замечание 1.* Если в уравнении (2.1) возмущение представимо в виде  $w(t) = B_{v,t} v(t)$ , где  $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$  и  $\|v(t)\|_\infty \leq d_v$ , то  $\Omega_t = d_v^2 n_v L B_{v,t} B_{v,t}^T$ .

Далее, из (2.5) следует, что матрицы  $\Delta_t$  порядка  $(n_x + n_z) \times (n_x + n_u)$ , которые могли бы генерировать полученные в экспериментах матрицы  $\Phi_t$  и  $Z_t$  при выбранных управлениях  $U_t$  и некоторых матрицах  $\widehat{W}_t$ , удовлетворяющих ограничению (2.5), характеризуются неравенствами

$$(2.6) \quad (\widetilde{\Phi}_{t+1} - \Delta_t \widehat{\Phi}_t)(\widetilde{\Phi}_{t+1} - \Delta_t \widehat{\Phi}_t)^T \leq \widehat{\Omega}_t, \quad t = 0, \dots, N-1.$$

Представим эти неравенства в виде

$$(2.7) \quad (\Delta_t \quad I_{n_x+n_z}) \Psi^{(1)}(t) (\Delta_t \quad I_{n_x+n_z})^T \leq 0, \quad t = 0, \dots, N-1,$$

где симметрические матрицы  $\Psi^{(1)}(t)$  порядка  $(2n_x + n_u + n_z) \times (2n_x + n_u + n_z)$  разбиваются на блоки  $\Psi_{ij}^{(1)}(t)$ ,  $i, j = 1, 2$  соответствующего порядка и вычисляются следующим образом:

$$(2.8) \quad \Psi^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \widehat{\Phi}_t \widehat{\Phi}_t^T & | & \star \\ \hline - & - & - \\ -\widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^T & | & \widetilde{\Phi}_{t+1} \widetilde{\Phi}_{t+1}^T - \widehat{\Omega}_t \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $\Delta_t^{(p)}$  множество матриц  $\Delta_t$ , согласованных с результатами эксперимента, т.е. удовлетворяющих неравенству (2.7) для данного  $t$ .

Покажем, что множество  $\Delta_t^{(p)}$  является, вообще говоря, неограниченным, и выясним, при каких условиях оно будет ограниченным. Для этого обозначим через  $\text{Im}(\cdot)$ ,  $\text{Ker}(\cdot)$ ,  $\text{span}(\cdot)$  и  $\text{rank}(\cdot)$  образ, ядро, линейное подпространство столбцов и столбцовый ранг соответствующей матрицы. Допустим, что  $\text{rank } \hat{\Phi}_t = s \leq \min\{n_x + n_u, L\}$  и представим матрицу  $\hat{\Phi}_t$  в виде сингулярного разложения [15]

$$(2.9) \quad \hat{\Phi}_t = (F_1 F_2) \begin{pmatrix} \Sigma & 0_{s \times (L-s)} \\ 0_{(n_x+n_u) \times s} & 0_{(n_x+n_u) \times (L-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1^T \\ G_2^T \end{pmatrix} = F_1 \Sigma G_1^T,$$

$$F_1 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times s}, \quad F_2 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u-s)}, \quad F = (F_1 F_2), \quad F^T F = I,$$

где  $\Sigma = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) > 0$ ,  $\lambda_i$  – собственные числа информационной матрицы  $\hat{\Phi}_t \hat{\Phi}_t^T$ ,  $\text{span } F_1 = \text{Im } \hat{\Phi}_t$ ,  $\text{span } F_2 = \text{Ker } \hat{\Phi}_t^T$ ,  $\text{span } G_1 = \text{Im } \hat{\Phi}_t^T$ ,  $\text{span } G_2 = \text{Ker } \hat{\Phi}_t$ . Выберем ортонормированный базис, состоящий из столбцов матрицы  $F$ , введем соответствующие переменные

$$\hat{\Delta}_t = \Delta_t (F_1 F_2) = \left( \hat{\Delta}_t^{(1)} \hat{\Delta}_t^{(2)} \right), \quad \hat{\Delta}_t^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_x \times s}, \quad \hat{\Delta}_t^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+n_u-n_y-s)}$$

и обозначим  $\hat{\Phi}_t^{(1)} = F_1^T \hat{\Phi}_t$ . Тогда линейная матричная регрессия (2.4) в новых переменных запишется как

$$(2.10) \quad \tilde{\Phi}_{t+1} = \hat{\Delta}_t^{(real)(1)} \hat{\Phi}_t^{(1)} + \widehat{W}_t, \quad t = 0, \dots, N-1,$$

где  $(s \times L)$ -матрица  $\hat{\Phi}_t^{(1)} = \Sigma G_1^T$  имеет полный строчный ранг, а  $\hat{\Delta}_t^{(real)(1)}$  – «проекция» матрицы  $\hat{\Delta}_t^{(real)}$  на подпространство  $\text{Im } \hat{\Phi}_t$ , т.е. ее строки являются проекциями строк матрицы  $\hat{\Delta}_t^{(real)}$  на подпространство  $\text{Im } \hat{\Phi}_t$ .

*Лемма 2.1. Множество  $\Delta_t^{(p)}$  матриц, согласованных с экспериментальными данными  $\hat{\Phi}_t = \text{col}(\Phi_t, U_t)$ , для которых верно (2.9), представляет собой неограниченный вырожденный «матричный эллипсоид», определяемый неравенством*

$$(2.11) \quad (\hat{\Delta}_t^{(1)} - \hat{\Delta}_t^{(LS)(1)}) \Sigma^2 (\hat{\Delta}_t^{(1)} - \hat{\Delta}_t^{(LS)(1)})^T \leq \hat{\Omega}_t,$$

где  $\hat{\Delta}_t^{(LS)(1)} = \tilde{\Phi}_{t+1} \hat{\Phi}_t^{(1)T} \Sigma^{-2}$  – оценка методом наименьших квадратов матрицы  $\hat{\Delta}_t^{(real)(1)}$  в (2.10).

*Следствие 2.1. Множество  $\Delta_t^{(p)}$  ограничено тогда и только тогда, когда выполнено ранговое условие*

$$(2.12) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi_t \\ U_t \end{pmatrix} = n_x + n_u.$$

В этом случае множество  $\Delta_t^{(p)}$  состоит из матриц, определяемых неравенством (2.11), в котором  $\hat{\Delta}_t^{(1)} = \hat{\Delta}_t$  и  $\hat{\Delta}_t^{(LS)(1)} = \hat{\Delta}_t^{(LS)}$ .

Доказательства этой и последующих лемм приведены в Приложении. Из этой леммы следует, что по полученным данным в общем случае можно идентифицировать только  $\widehat{\Delta}_t^{(real)(1)}$  – «проекцию» неизвестной матрицы на подпространство  $\text{Im } \widehat{\Phi}_t$ . При выполнении рангового условия (2.12) матрица  $\Delta_t^{(real)}$  в (2.4) идентифицируема, а «матричный эллипсоид» и соответственно множество  $\Delta_t^{(p)}$  ограничены. Отметим, что для выполнения рангового условия (2.12) необходимо, чтобы количество измерений было не меньше, чем сумма размерностей векторов состояния и управления, т.е.  $N \geq n_x + n_u$ . В отличие от [4] в рассматриваемом здесь синтезе робастного управления не требуется выполнения рангового условия и количество экспериментов может быть меньше, чем  $n_x + n_u$ . Как будет показано далее и продемонстрировано на примере, если ранговое условие не выполнено и соответственно информационная матрица вырождена, то ограничение области неопределенности происходит за счет использования априорной информации.

*Замечание 2.* Если неизвестная нестационарная система (2.1) является периодической с известным периодом  $T$ , то матрицы экспериментальных данных могут быть сформированы по измерениям одной траектории на интервале  $[0, LT]$ . Для этого при  $t = 0, \dots, T$  обозначим матрицы

$$\begin{aligned} \Phi_t &= (x_t \ x_{T+t} \ \dots \ x_{(L-1)T+t}), & U_t &= (u_t \ u_{T+t} \ \dots \ u_{(L-1)T+t}), \\ W_t &= (w_t \ w_{T+t} \ \dots \ w_{(L-1)T+t}), & Z_t &= (z_t \ z_{T+t} \ \dots \ z_{(L-1)T+t}) \end{aligned}$$

и получим уравнения, аналогичные (2.4), и соответственно неравенства, аналогичные (2.7) при  $t = 0, \dots, T - 1$ .

*Замечание 3.* Для неизвестной стационарной системы вида (2.1), для которой, в частности, можно провести только один эксперимент, т.е. выбрать  $L = 1$ , из матриц (2.2) составим матрицы

$$\begin{aligned} \Phi_{[0, N-1]} &= (\Phi_0 \ \dots \ \Phi_{N-1}), & \Phi_{[1, N]} &= (\Phi_1 \ \dots \ \Phi_N), \\ U_{[0, N-1]} &= (U_0 \ \dots \ U_{N-1}), & Z_{[0, N-1]} &= (Z_0 \ \dots \ Z_{N-1}), \\ W_{[0, N-1]} &= (W_0 \ \dots \ W_{N-1}). \end{aligned}$$

В этом случае имеет место уравнение  $\widetilde{\Phi} = \Delta^{(real)} \widehat{\Phi} + \widehat{W}$ , в котором

$$\widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_{[0, N-1]} \\ U_{[0, N-1]} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_{[1, N]} \\ Z_{[0, N-1]} \end{pmatrix}, \quad \widehat{W} = \begin{pmatrix} W_{[0, N-1]} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда аналогичным образом приходим к неравенству вида (2.7) со стационарной матрицей  $\Psi^{(1)}$  относительно неизвестной матрицы параметров  $\Delta$ .

## 2.2. Априорная информация

Пусть, как это принято в традиционных методах синтеза робастного управления, имеется дополнительная информация о том, что неизвестные

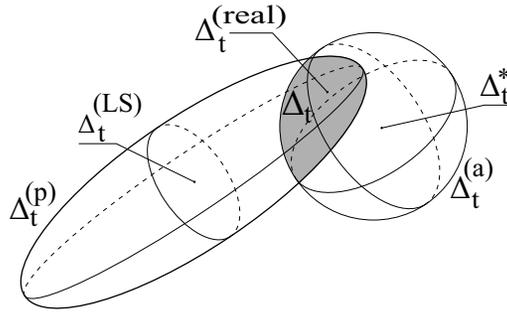


Рис. 1. Множества  $\Delta_t^{(p)}$ ,  $\Delta_t^{(a)}$  и  $\Delta_t$  матриц, согласованных только с экспериментальными, только с априорными и с экспериментальными и априорными данными.

матрицы  $\Delta_t^{(real)}$ ,  $t = 0, \dots, N - 1$  удовлетворяют ограничениям

$$(2.13) \quad (\Delta_t - \Delta_t^*)(\Delta_t - \Delta_t^*)^T \leq \rho_t^2 I, \quad \Delta_t^* = \begin{pmatrix} A_t^* & B_t^* \\ C_t^* & D_t^* \end{pmatrix},$$

в которых  $\Delta_t^*$  и  $\rho_t$  – заданные матрицы и скаляры, характеризующие центры и радиусы «матричных сфер». Запишем это неравенство в виде

$$(2.14) \quad (\Delta_t \quad I) \Psi^{(2)}(t) (\Delta_t \quad I)^T \leq 0,$$

где матрица  $\Psi^{(2)}(t)$  состоит из блоков  $\Psi_{ij}^{(2)}(t)$ ,  $i, j = 1, 2$  и имеет вид

$$(2.15) \quad \Psi^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} I & | & \star \\ \hline - & - & - \\ -\Delta_t^* & | & \Delta_t^* \Delta_t^{*T} - \rho_t^2 I \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $\Delta_t^{(a)}$  множество матриц  $\Delta_t$ , удовлетворяющих для данного  $t$  неравенству (2.14), и через  $\Delta_t = \Delta_t^{(p)} \cap \Delta_t^{(a)}$  множество матриц, удовлетворяющих неравенствам (2.7) и (2.14). Таким образом,  $\Delta_t$  – это множество всех матриц  $\Delta_t$ , согласованных при данном  $t$  с экспериментальными и априорными данными. Очевидно, что  $\Delta_t^{(real)} \in \Delta_t$ . На рис. 1 для иллюстрации схематично изображен один из возможных вариантов расположения множеств  $\Delta_t^{(p)}$ ,  $\Delta_t^{(a)}$  и их пересечения  $\Delta_t$ .

Обозначим набор матриц  $\Delta_{[0, N-1]} = (\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1})$ , согласованных только с экспериментальными, только с априорными и с теми и другими данными для всех  $t = 0, \dots, N - 1$  соответственно через  $\Delta_{[0, N-1]}^{(p)} = (\Delta_0^{(p)}, \dots, \Delta_{N-1}^{(p)})$ ,  $\Delta_{[0, N-1]}^{(a)} = (\Delta_0^{(a)}, \dots, \Delta_{N-1}^{(a)})$  и  $\Delta_{[0, N-1]} = (\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1})$ .

### 2.3. Цели управления

Качество неопределенной системы (2.1), замкнутой управлением вида линейной нестационарной обратной связи по состоянию  $u(t) = \Theta_t x(t)$ , будем

оценивать максимально возможным уровнем гашения начального и внешнего возмущений, т.е. верхней границей обобщенной  $H_\infty$ -нормы замкнутой системы при всех матрицах системы, согласованных с экспериментальными и априорными данными:

$$(2.16) \quad \gamma_{g\infty}(\Theta_{[0,N-1]}; R, S) = \sup_{\Delta_{[0,N-1]} \in \mathbf{\Delta}_{[0,N-1]}} \sup_{x_0, w} \left( \frac{\|z\|_{[0,N-1]}^2 + x^T(N)Sx(N)}{x_0^T R^{-1}x_0 + \|w\|_{[0,N-1]}^2} \right)^{1/2},$$

где  $R = R^T > 0$  и  $S = S^T > 0$  – весовые матрицы начального и терминального состояний соответственно,  $\|\xi\|_{[0,t]}^2 = \sum_{i=0}^t |\xi(i)|^2$ . Смысл этого критерия можно пояснить следующим образом. Состояние системы в текущий момент времени зависит линейно от начальных условий и возмущений, и их увеличение приводит к соответствующему увеличению переменных состояния. Для того чтобы характеризовать поведение системы при неопределенных начальных условиях и возмущениях, нормализуем соответствующий функционал величиной, равной указанной в знаменателе сумме, или, что то же самое для линейной системы, ограничим эту сумму единицей. Для стационарной системы на бесконечном горизонте в (2.16) следует положить  $S = 0$ ,  $N = \infty$  и  $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ , где  $\mathbf{\Delta}$  – множество неизвестных матриц системы, согласованных с экспериментальными и априорными данными.

Когда начальное состояние нулевое, обобщенная  $H_\infty$ -норма превращается в стандартную  $H_\infty$ -норму

$$(2.17) \quad \gamma_\infty(\Theta_{[0,N-1]}; S) = \sup_{\Delta_{[0,N-1]} \in \mathbf{\Delta}_{[0,N-1]}} \sup_{w \neq 0} \frac{\left( \|z\|_{[0,N-1]}^2 + x^T(N)Sx(N) \right)^{1/2}}{\|w\|_{[0,N-1]}},$$

что соответствует  $R \rightarrow 0$  в обобщенной  $H_\infty$ -норме (2.16). При отсутствии внешнего возмущения, т.е. при  $w(t) \equiv 0$ , критерий (2.16) принимает вид  $\gamma_0$ -нормы

$$(2.18) \quad \gamma_0(\Theta_{[0,N-1]}; R, S) = \sup_{\Delta_{[0,N-1]} \in \mathbf{\Delta}_{[0,N-1]}} \sup_{x_0 \neq 0} \left( \frac{\|z\|_{[0,N-1]}^2 + x^T(N)Sx(N)}{x_0^T R^{-1}x_0} \right)^{1/2},$$

характеризующей максимальное значение квадратичного функционала на траекториях системы при начальных состояниях, принадлежащих эллипсоиду  $x^T R^{-1}x \leq 1$ . Если в уравнении (2.1) имеем  $C_t \equiv 0$  и  $D_t \equiv 0$ , то получим верхнюю границу максимального уклонения терминального состояния замкнутой неопределенной системы

$$(2.19) \quad \gamma_N(\Theta_{[0,N-1]}; R, S) = \sup_{\Delta_{[0,N-1]} \in \mathbf{\Delta}_{[0,N-1]}} \sup_{x_0, w} \left( \frac{x^T(N)Sx(N)}{x_0^T R^{-1}x_0 + \|w\|_{[0,N-1]}^2} \right)^{1/2}.$$

В дальнейшем там, где это не является необходимым, весовые матрицы в качестве аргументов рассматриваемых норм будут опускаться.

Задача заключается в том, чтобы, не имея и не строя математическую модель системы, синтезировать управление, при котором один из перечисленных выше критериев ограничен заданной константой, т.е. в общем случае  $\gamma_{g\infty}(\Theta_{[0, N-1]}) \leq \gamma$ .

### 3. Анализ заданной системы на основе функции Ляпунова двойственной системы

Для заданной системы

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= \mathcal{A}_t x(t) + \mathcal{B}_t v(t), & x(0) &= x_0, \\ z(t) &= \mathcal{C}_t x(t) + \mathcal{D}_t v(t), & t &= 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

обобщенной  $H_\infty$ -нормой с весовыми матрицами  $R > 0$  и  $S > 0$  начального и терминального состояний называется максимальное значение квадратного корня из отношения суммы квадрата  $l_2$ -нормы выхода и квадратичной формы терминального состояния системы к сумме квадратичной формы начального состояния и квадрата  $l_2$ -нормы возмущения, т.е.

$$(3.2) \quad \|H\|_{g\infty}(R, S) = \sup_{x_0, v} \left( \frac{\|z\|_{[0, N-1]}^2 + x^T(N) S x(N)}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[0, N-1]}^2} \right)^{1/2},$$

где супремум берется по всем начальным состояниям  $x(0) = x_0$  и всем возмущениям  $v \in l_2$ , одновременно не обращающимся в ноль.

Известна следующая характеристика обобщенной  $H_\infty$ -нормы на конечном интервале в терминах функции Ляпунова, которая приводит к вычислению этой нормы с помощью линейных матричных неравенств.

*Лемма 3.1* [16]. *Обобщенная  $H_\infty$ -норма (3.2) системы (3.1) удовлетворяет условию  $\|H\|_{g\infty}(R, S) \leq \gamma$  тогда и только тогда, когда для приращения функции  $V_t(x) = x^T X_t x$  с  $X_t = X_t^T > 0$ ,  $X_0 \leq \gamma^2 R^{-1}$  и  $X_N = S$  по траектории системы для всех  $t \in [0, N-1]$  верны неравенства*

$$(3.3) \quad V_{t+1}(x(t+1)) - V_t(x(t)) + |z(t)|^2 - \gamma^2 |v(t)|^2 \leq 0.$$

*Замечание 4.* Для стандартной  $H_\infty$ -нормы из приведенных в лемме 3.1 условий исчезает неравенство  $X_0 \leq \gamma^2 R^{-1}$ , а для  $\gamma_0$ -нормы и максимального уклонения терминального состояния в неравенстве (3.3) исчезают соответственно слагаемое  $\gamma^2 |v(t)|^2$  и слагаемое  $|z(t)|^2$ .

Сформулируем две леммы, доказательства которых приведены в Приложении, позволяющие установить соответствие между обобщенными  $H_\infty$ -нормами прямой и двойственной систем. Предварительно напомним, что обобщенная  $H_\infty$ -норма является индуцированной нормой линейного оператора,

порождаемого системой (3.1) и отображающего пару  $(x_0, v(t)) \in \mathbb{R}^{n_x} \times l_2 = \Xi_1$ , состоящую из начального состояния и возмущения на входе, в пару  $(x(N), z(t)) \in \mathbb{R}^{n_x} \times l_2 = \Xi_2$ , состоящую из терминального состояния и целевого выхода, т.е.  $\|H\|_{g_\infty} = \|\Gamma_{g_\infty}\|$ , где

$$\Gamma_{g_\infty} : \Xi_1 = \mathbb{R}^{n_x} \times l_2[0, N-1] \rightarrow \Xi_2 = \mathbb{R}^{n_x} \times l_2[0, N-1] : (x_0, v) \rightarrow (x(N), z).$$

Скалярные произведения в этих пространствах определяются как

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Xi_1} &= x_1^T(0)R^{-1}x_2(0) + \langle v_1(t), v_2(t) \rangle_{l_2}, \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Xi_2} &= x_1^T(N)Sx_2(N) + \langle z_1(t), z_2(t) \rangle_{l_2}. \end{aligned}$$

*Лемма 3.2.* *Спряженный оператор  $\Gamma_{g_\infty}^*$  и его норма определяются как*

$$(3.4) \quad \Gamma_{g_\infty}^* : \Xi_2 \rightarrow \Xi_1 : (S^{-1}\hat{x}(N), \hat{v}(t)) \rightarrow (R\hat{x}(0), \hat{z}(t)),$$

$$\|\Gamma_{g_\infty}^*\| = \sup_{\hat{x}(N), \hat{v}} \left[ \frac{\|\hat{z}\|_{[0, N-1]}^2 + \hat{x}^T(0)R\hat{x}(0)}{\hat{x}^T(N)S^{-1}\hat{x}(N) + \|\hat{v}\|_{[0, N-1]}^2} \right]^{1/2},$$

где  $\hat{x}(t)$  и  $\hat{z}(t)$  удовлетворяют уравнениям

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \hat{x}(t) &= \mathcal{A}_t^T \hat{x}(t+1) + \mathcal{C}_t^T \hat{v}(t), \\ \hat{z}(t) &= \mathcal{B}_t^T \hat{x}(t+1) + \mathcal{D}_t^T \hat{v}(t), \quad t = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

*Лемма 3.3.* *Обобщенная  $H_\infty$ -норма с весовыми матрицами  $R$  и  $S$  начального и терминального состояний системы (3.1) совпадает с обобщенной  $H_\infty$ -нормой с весовыми матрицами  $S$  и  $R$  начального и терминального состояний двойственной системы*

$$(3.6) \quad \begin{aligned} x_d(t+1) &= \mathcal{A}_{N-1-t}^T x_d(t) + \mathcal{C}_{N-1-t}^T v_d(t), \\ z_d(t) &= \mathcal{B}_{N-1-t}^T x_d(t) + \mathcal{D}_{N-1-t}^T v_d(t), \quad t = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

т.е.

$$(3.7) \quad \begin{aligned} &\sup_{x_0, v} \left( \frac{\|z\|_{[0, N-1]}^2 + x^T(N)Sx(N)}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[0, N-1]}^2} \right)^{1/2} = \\ &= \sup_{x_d(0), v_d} \left[ \frac{\|z_d\|_{[0, N-1]}^2 + x_d^T(N)R x_d(N)}{x_d^T(0)S^{-1}x_d(0) + \|v_d\|_{[0, N-1]}^2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

*Следствие 3.1.* *Максимальное уклонение  $\gamma_N(R, S)$  терминального состояния системы (3.1) совпадает с  $\gamma_0(S, R)$ -нормой двойственной системы (3.6), в которой  $\mathcal{C}_t \equiv 0$  и  $\mathcal{D}_t \equiv 0$ , т.е.*

$$(3.8) \quad \begin{aligned} &\sup_{x_0, v} \left( \frac{x^T(N)Sx(N)}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[0, N-1]}^2} \right)^{1/2} = \\ &= \sup_{x_d(0) \neq 0} \left( \frac{\|z_d\|_{[0, N-1]}^2 + x_d^T(N)R x_d(N)}{x_d^T(0)S^{-1}x_d(0)} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

и соответственно  $\gamma_0(R, S) = \gamma_N^{(d)}(S, R)$ . Стандартная  $H_\infty$ -норма системы (3.1) следующим образом выражается в терминах двойственной системы (3.6):

$$\begin{aligned} & \sup_{x_0=0, v \neq 0} \frac{\left( \|z\|_{[0, N-1]}^2 + x^T(N)Sx(N) \right)^{1/2}}{\|v\|_{[0, N-1]}} = \\ & = \sup_{x_d(0), v_d} \frac{\|z_d\|_{[0, N-1]}}{\left( x_d^T(0)S^{-1}x_d(0) + \|v_d\|_{[0, N-1]}^2 \right)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Учитывая согласно лемме 3.3 равенство соответствующих обобщенных  $H_\infty$ -норм и прямой и двойственной систем и применяя для нормы  $\|H^{(d)}\|_{g\infty}(S, R)$  двойственной системы (3.6) лемму 3.1, приходим к следующей характеристизации обобщенной  $H_\infty$ -нормы исходной системы.

*Теорема 3.1.* Для системы (3.1) выполняется условие  $\|H\|_{g\infty}(R, S) \leq \gamma$  тогда и только тогда, когда существует функция  $\widehat{V}_t(x_d) = x_d^T P_t x_d$  с  $P_t > 0$ ,  $P_0 \leq \gamma^2 S^{-1}$  и  $P_N = R$ , приращение которой по траектории двойственной системы (3.6) при всех  $t = 0, \dots, N-1$  удовлетворяет неравенствам

$$(3.9) \quad \widehat{V}_{t+1}(x_d(t+1)) - \widehat{V}_t(x_d(t)) + |z_d(t)|^2 - \gamma^2 |v_d(t)|^2 \leq 0.$$

*Замечание 5.* При аналогичной характеристизации  $\gamma_0$ -нормы и максимального отклонения терминального состояния в неравенстве (3.9) исчезнут соответственно слагаемые  $|z_d(t)|^2$  и  $\gamma^2 |v_d(t)|^2$ , а для  $H_\infty$ -нормы в условиях теоремы 3.1 следует положить  $R = 0$  (см. замечание 4).

*Замечание 6.* Записывая неравенства (3.9) для квадратичных форм в матричном виде, приходим к линейным матричным неравенствам

$$(3.10) \quad \begin{pmatrix} -P_{t+1} & * & * & * \\ \mathcal{A}_{N-1-t}P_{t+1} & -P_t & * & * \\ \mathcal{C}_{N-1-t}P_{t+1} & 0 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & \mathcal{B}_{N-1-t}^T & \mathcal{D}_{N-1-t}^T & -I \end{pmatrix} \leq 0, \\ P_0 \leq \gamma^2 S^{-1}, \quad P_N = R, \quad t = 0, \dots, N-1$$

относительно матриц  $P_t$ , которые разрешимы тогда и только тогда, когда  $\|H\|_{g\infty}(R, S) \leq \gamma$ .

*Замечание 7.* Матрицы функций  $V_t(x) = x^T X_t x$  и  $\widehat{V}_t(x_d) = x_d^T P_t x_d$  прямой и двойственной систем связаны соотношением  $P_t = \gamma^2 X_{N-t}^{-1}$ . Это непосредственно проверяется, если в неравенствах (3.10) осуществить замену  $P_t = \gamma^2 X_{N-t}^{-1}$  и стандартным образом прийти к тому, что для функции  $V(x) = x^T X_t x$  по траектории системы (3.1) выполняется неравенство (3.3).

*Замечание 8.* Для стационарной системы все указанные функции Ляпунова имеют постоянные матрицы, а матрица  $P \geq R$  удовлетворяет стационарному варианту первого неравенства (3.10) [16].

#### 4. Синтез законов управления неопределенной системой

##### 4.1. Обобщенное $H_\infty$ -управление на конечном горизонте

Опишем основные шаги получения по экспериментальным и априорным данным верхней границы обобщенной  $H_\infty$ -нормы с весовыми матрицами  $R$  и  $S$  и соответствующих параметров  $\Theta_t$  законов управления для неопределенной системы (2.1). Уравнения замкнутой системы имеют вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (A_t + B_t \Theta_t) x(t) + w(t), \\ z(t) &= (C_t + D_t \Theta_t) x(t). \end{aligned}$$

Учитывая введенные обозначения, представим эти уравнения в виде

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (I_{n_x} \ 0_{n_x \times n_z}) \Delta_t \begin{pmatrix} I_{n_x} \\ \Theta_t \end{pmatrix} x(t) + w(t), \\ z(t) &= (0_{n_z \times n_x} \ I_{n_z}) \Delta_t \begin{pmatrix} I_{n_x} \\ \Theta_t \end{pmatrix} x(t), \end{aligned}$$

где  $\Delta_t$  – неизвестная  $(n_x + n_z) \times (n_x + n_u)$ -матрица,  $\Theta_t$  –  $(n_u \times n_x)$ -матрица параметров регулятора. Запишем уравнения двойственной системы:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} x_d(t+1) &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix}^\top \Delta_{N-1-t}^\top \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} x_d(t) + \\ &+ \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix}^\top \Delta_{N-1-t}^\top \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} w_d(t), \\ z_d(t) &= x_d(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим также систему, которую назовем расширенной, с дополнительными искусственными входом  $w_\Delta(t) \in \mathbb{R}^{n_x+n_u}$  и выходом  $z_\Delta(t) \in \mathbb{R}^{n_x+n_z}$ , определяемую уравнениями

$$(4.4) \quad \begin{aligned} x_a(t+1) &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix}^\top w_\Delta(t), \\ z_a(t) &= x_a(t), \quad z_\Delta(t) = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} x_a(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} w_a(t), \end{aligned}$$

в которых  $x_a(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – состояние,  $w_a(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  – возмущение,  $z_a(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – целевой выход. Допустим, что дополнительный входной сигнал  $w_\Delta(t)$  в системе (4.4) при всех  $t \geq 0$  удовлетворяет неравенствам

$$(4.5) \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^\top \Psi^{(k)}(N-1-t) \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0, \quad k = 1, 2,$$

где матрицы  $\Psi^{(k)}(t)$  заданы в (2.8) и (2.15). Множество всех таких сигналов  $w_\Delta(t)$  обозначим через  $\mathbf{W}_\Delta$ . Определим уровень гашения возмущений с весовыми матрицами  $S > 0$  и  $R > 0$  системы (4.4), (4.5) как

$$\hat{\gamma}_{g\infty}(S, R) = \sup_{w_\Delta \in \mathbf{W}_\Delta} \sup_{x_a(0), w_a} \left( \frac{\|z_a\|_{[0, N-1]}^2 + x_a^T(N) R x_a(N)}{x_a^T(0) S^{-1} x_a(0) + \|w_a\|_{[0, N-1]}^2} \right)^{1/2}.$$

Заметим, что при  $w_\Delta(t) = \Delta_{N-1-t}^T z_\Delta(t)$  уравнения (4.4) совпадают с уравнениями (4.3) и выполняются следующие неравенства при  $k = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi^{(k)}(N-1-t) \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} = \\ & = z_\Delta^T(t) \begin{pmatrix} \Delta_{N-1-t}^T \\ I \end{pmatrix}^T \Psi^{(k)}(N-1-t) \begin{pmatrix} \Delta_{N-1-t}^T \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $w_\Delta(t) = \Delta_{N-1-t}^T z_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta$  и, следовательно, система (4.3) при всех  $\Delta_{[0, N-1]} \in \mathbf{\Delta}_{[0, N-1]}$  «погружена» в расширенную систему (4.4), (4.5), а обобщенная  $H_\infty$ -норма с весовыми матрицами  $S > 0$  и  $R > 0$  двойственной системы (4.3) не превышает уровень гашения возмущений  $\hat{\gamma}_{g\infty}(S, R)$ . Сформулируем и докажем следующее основное утверждение.

*Теорема 4.1. Верхняя граница обобщенной  $H_\infty$ -нормы с весовыми матрицами  $R$  и  $S$  неопределенной системы (2.1) при законе управления  $u(t) = \Theta_t x(t)$  с  $\Theta_{N-1-t} = Q_{t+1} P_{t+1}^{-1}$ ,  $t = 0, \dots, N-1$  удовлетворяет неравенству  $\gamma_{g\infty}(\Theta_{[0, N-1]}; R, S) \leq \gamma$ , если следующие линейные матричные неравенства разрешимы относительно  $P_t = P_t^T > 0$ ,  $Q_t$  и  $\mu_t^{(k)} \geq 0$ ,  $k = 1, 2$ :*

$$(4.6) \quad \begin{pmatrix} -P_{t+1} & * & * \\ \begin{pmatrix} P_{t+1} \\ Q_{t+1} \end{pmatrix} & -\sum_{k=1}^2 \mu_t^{(k)} \Psi_{11}^{(k)} & * \\ 0 & -\sum_{k=1}^2 \mu_t^{(k)} \Psi_{21}^{(k)} & -\sum_{k=1}^2 \mu_t^{(k)} \Psi_{22}^{(k)} + K_t \end{pmatrix} \leq 0,$$

$$K_t = \begin{pmatrix} I - P_t & * \\ 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix}, \quad P_N = R, \quad P_0 \leq \gamma^2 S^{-1},$$

в которых  $\Psi_{ij}^{(k)} = \Psi_{ij}^{(k)}(N-1-t)$ ,  $i, j = 1, 2$  обозначают соответствующие блоки матриц  $\Psi^{(k)}(N-1-t)$ , а матрицы  $\Psi^{(k)}(t)$  заданы в (2.8) и (2.15).

*Доказательство теоремы 4.1.* Согласно лемме 3.3 обобщенная  $H_\infty$ -норма с весовыми матрицами  $R > 0$  и  $S > 0$  исходной системы при каждом  $\Delta_{[0, N-1]}$  совпадает с обобщенной  $H_\infty$ -нормой с весовыми матрицами  $S > 0$  и  $R > 0$  двойственной системы (4.3). Так как система (4.3) при

$\Delta_{[0, N-1]} \in \mathbf{\Delta}_{[0, N-1]}$  «погружена» в расширенную систему (4.4), (4.5), то указанная ее норма не превышает уровень гашения возмущений  $\widehat{\gamma}_{g\infty}(S, R)$  системы (4.4), (4.5). В свою очередь,  $\widehat{\gamma}_{g\infty}(S, R) \leq \gamma$ , если существует функция  $V_t(x_a) = x_a^T P_t x_a$  с  $P_t > 0$ ,  $P_0 \leq \gamma^2 S^{-1}$  и  $P_N = R$ , для которой по траектории расширенной системы при всех  $t = 0, \dots, N-1$  выполняются неравенства

$$(4.7) \quad \Delta V_t + |z_a(t)|^2 - \gamma^2 |w_a(t)|^2 \leq 0$$

для всех  $w_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta$ , удовлетворяющих неравенствам (4.5). В этом можно убедиться, если сложить неравенства (4.7) при  $t = 0, \dots, N-1$  и принять во внимание начальное и терминальное условия для матрицы  $P_t$ .

Далее, согласно  $S$ -процедуре для выполнения (4.7) при ограничениях (4.5) достаточно выполнения неравенств

$$(4.8) \quad \Delta V_t + |z_a(t)|^2 - \gamma^2 |w_a(t)|^2 - \sum_{k=1}^2 \mu_t^{(k)} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi^{(k)}(N-1-t) \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0$$

для всех  $x_a(t)$ ,  $w_a(t)$ ,  $w_\Delta(t)$  и некоторых  $\mu_t^{(k)} \geq 0$ ,  $k = 1, 2$ , где  $z_a(t) = x_a(t)$  и  $z_\Delta(t) = \text{col}(x_a(t), w_a(t))$ . Таким образом, если выполнены неравенства (4.8), то  $\gamma_{g\infty}(\Theta_{[0, N-1]}; R, S) \leq \widehat{\gamma}_{g\infty}(S, R) \leq \gamma$ . Записывая неравенства (4.8) в виде матричных неравенств

$$\left( \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix} P_{t+1} \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix}^T \quad \star \\ 0 \quad K_t \right) - \sum_{k=1}^2 \mu_t^{(k)} \Psi^{(k)}(N-1-t) \leq 0,$$

вводя новые матричные переменные  $Q_{t+1} = \Theta_{N-1-t} P_{t+1}$ ,  $t = 0, \dots, N-1$  и применяя лемму Шура, стандартным образом получим неравенства (4.6). Теорема доказана.

*Замечание 9.* Как показано в [17, теорема 4.1],  $S$ -процедура может быть неущербной при двух квадратичных ограничениях, если применительно к рассматриваемой задаче при некоторых  $\alpha_t^{(1)}$  и  $\alpha_t^{(2)}$  выполняется неравенство  $\alpha_t^{(1)} \Psi^{(1)}(t) + \alpha_t^{(2)} \Psi^{(2)}(t) > 0$  для всех  $t$  (что проверяется непосредственным решением этих линейных матричных неравенств относительно  $\alpha_t^{(1)}$  и  $\alpha_t^{(2)}$ ). В этом случае условия теоремы 4.1 необходимы и достаточны для выполнения неравенства  $\widehat{\gamma}_{g\infty}(S, R) \leq \gamma$ .

*Замечание 10.* При построении закона управления только по экспериментальным данным или только по априорной информации в силу неущербности  $S$ -процедуры с одним ограничением условия теоремы 4.1 являются не только достаточными, но также и необходимыми для выполнения неравенства  $\widehat{\gamma}_{g\infty}(S, R) \leq \gamma$ .

*Замечание 11.* Если в уравнении (4.1) возмущение представимо в виде  $w(t) = B_{v,t}v(t)$  (см. замечание 1), то из контекста следует, что целевой выход расширенной системы будет равен  $z_a(t) = B_{v,t}^T x_a(t)$ . Это приведет к тому, что при вычислении верхней границы обобщенной  $H_\infty$ -нормы неопределенной системы (4.1) относительно возмущения  $v(t)$  следует в блоках, стоящих в четвертой строке и четвертом столбце неравенств (4.6), заменить слагаемое  $I$  на  $B_{v,t}B_{v,t}^T$ .

*Замечание 12.* Для стационарной системы (см. замечание 3) верхняя граница обобщенной  $H_\infty$ -нормы с весовой матрицей начального состояния  $R$  при законе управления  $u(t) = \Theta x(t)$ , где  $\Theta = QP^{-1}$ , удовлетворяет неравенству  $\gamma_{g\infty}(\Theta; R) \leq \gamma$ , если «стационарное» первое линейное матричное неравенство в (4.6) разрешимо относительно  $P = P^T > R$ ,  $Q$  и  $\mu^{(k)} \geq 0$ ,  $k = 1, 2$ . Этот результат при  $L = 1$  согласуется с соответствующим результатом в [14].

Назовем гарантированными и обозначим через  $\gamma_{g\infty}^*$ ,  $\gamma_{g\infty}^{(a)}$  и  $\gamma_{g\infty}^{(p)}$  минимальные верхние границы обобщенной  $H_\infty$ -нормы замкнутой системы, которые согласно теореме 4.1 могут быть достигнуты при законах управления, синтезированных по экспериментальным и априорным данным, только по априорным и только по экспериментальным данным соответственно. Это минимальные значения  $\gamma$ , для которых неравенства (4.6) разрешимы при  $\mu_t^{(k)} \geq 0$ ,  $k = 1, 2$ , при  $\mu_t^{(1)} \equiv 0$ ,  $\mu_t^{(2)} \geq 0$  и при  $\mu_t^{(1)} \geq 0$ ,  $\mu_t^{(2)} \equiv 0$  соответственно. Из теоремы 4.1 непосредственно следует неравенство

$$\gamma_{g\infty}^* \leq \min \left\{ \gamma_{g\infty}^{(a)}, \gamma_{g\infty}^{(p)} \right\},$$

которое объясняет преимущество робастных законов управления, построенных по априорным и экспериментальным данным, над робастными законами управления, построенными только по априорным или только по экспериментальным данным. А именно, с одной стороны, когда априорная информация достаточно грубая, т.е. радиусы  $\rho_t$  матричных сфер в (2.13) достаточно велики и соответственно  $\gamma_{g\infty}^{(a)}$  принимает большое значение, то  $\gamma_{g\infty}^*$  может оказаться малой, если помехи в измерениях не очень большие, т.е. небольшими являются матричные эллипсоиды  $\Delta_t^{(p)}$ . С другой стороны, если помехи в измерениях оказываются достаточно большими и соответственно большой является  $\gamma_{g\infty}^{(p)}$  или, более того, если не выполняется ранговое условие и информационная матрица является вырожденной, а матричные эллипсоиды  $\Delta_t^{(a)}$  оказываются неограниченными, то  $\gamma_{g\infty}^*$  может тем не менее стать малой за счет малости радиусов матричных сфер при использовании априорной информации. Эти выводы будут подтверждены результатами математического моделирования в разделе 5.

#### 4.2. $\gamma_0$ -Управление на конечном горизонте

Пусть теперь по экспериментальным и априорным данным требуется построить управление, минимизирующее  $\gamma_0$ -норму. Допустим, что эксперимен-

тальные данные, как и ранее, удовлетворяют соотношениям (2.4). В отличие от изложенного выше синтеза обобщенного  $H_\infty$ -управления теперь уравнение (4.2) не содержит возмущения  $w(t)$ , уравнение двойственной системы (4.3) не содержит целевого выхода  $z_d(t)$  (см. замечание 5), а уравнение расширенной системы (4.4) не содержит целевого выхода, т.е.  $z_a(t) \equiv 0$ . В соответствие с этим в неравенствах (4.8) исчезает слагаемое  $|z_a(t)|^2$ . В конечном итоге это приводит к тому, что верхняя граница  $\gamma_0$ -нормы неопределенной системы (2.1) не превышает  $\gamma$ , если разрешимы неравенства (4.6), в которых в четвертой блочной строке и четвертом блочном столбце отсутствует слагаемое  $I$ . Заметим также, что при синтезе стандартного  $H_\infty$ -управления в условиях теоремы 4.1 следует положить  $R = 0$ .

#### 4.3. Управление максимальным уклонением терминального состояния

Рассмотрим синтез управления по экспериментальным и априорным данным для минимизации заданного в (2.19) максимального уклонения терминального состояния  $\gamma_N^*(\Theta_{[0, N-1]}; R, S)$  в неопределенной системе

$$(4.9) \quad x(t+1) = A_t x(t) + B_t u(t) + w(t), \quad x(0) = x_0.$$

Так как целевой выход в системе отсутствует, то в этом случае матрицы с экспериментальными данными удовлетворяют уравнению

$$(4.10) \quad \Phi_{t+1} = \Delta_t^{(real)} \widehat{\Phi}_t + W_t,$$

в котором  $\Delta_t^{(real)} = (A_t^{(real)} \ B_t^{(real)})$ , а остальные матрицы заданы в (2.2) и  $W_t W_t^T \leq \Omega_t$ . Матрицы  $\Delta_t$ , согласованные с экспериментальными данными, определяются неравенствами (2.7), в которых теперь

$$(4.11) \quad \Psi^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \widehat{\Phi}_t \widehat{\Phi}_t^T & | & * \\ \hline - & - & - \\ -\Phi_{t+1} \widehat{\Phi}_t^T & | & \Phi_{t+1} \Phi_{t+1}^T - \Omega_t \end{pmatrix},$$

и блоки этой матрицы обозначим как  $\Psi_{ij}^{(1)}(t)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Матрицы  $\Delta_t$ , согласованные с априорными данными, определяются неравенствами (2.14), в которых  $\Delta_t^* = (A_t^* \ B_t^*)$ . Исходная система (4.9) представима уравнением

$$(4.12) \quad x(t+1) = \Delta_t \begin{pmatrix} I_{n_x} \\ \Theta_t \end{pmatrix} x(t) + w(t),$$

двойственная система описывается уравнением

$$(4.13) \quad \begin{aligned} x_d(t+1) &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix}^T \Delta_{N-1-t}^T x_d(t), \\ z_d(t) &= x_d(t), \end{aligned}$$

а расширенная система – уравнением

$$(4.14) \quad \begin{aligned} x_a(t+1) &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta_{N-1-t} \end{pmatrix}^T w_\Delta(t), \\ z_a(t) &= x_a(t), \quad z_\Delta(t) = x_a(t), \end{aligned}$$

в котором  $w_\Delta \in \mathbf{W}_\Delta$ . Аналогично доказательству теоремы 4.1 придем к неравенствам (4.8), в которых теперь  $w_a(t) \equiv 0$  и  $z_\Delta(t) = x_a(t)$ . Записывая эти неравенства в виде матричных неравенств, получим линейные матричные неравенства вида (4.6), которые определяют верхнюю границу максимального уклонения терминального состояния неопределенной системы при законе управления  $u(t) = \Theta_t x(t)$ , где  $\Theta_{N-1-t} = Q_{t+1} P_{t+1}^{-1}$ ,  $t = 0, \dots, N-1$ .

## 5. Иллюстративный пример

Приведем результаты ряда экспериментов с системой, полученной путем дискретизации с шагом  $h$  уравнения Матье

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \omega_0^2 (1 + \varepsilon \sin \omega \tau) \varphi = u + v,$$

описывающего колебания параметрического осциллятора. Представим полученное уравнение в виде системы

$$(5.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= \begin{pmatrix} 1 & h \\ -\omega_0^2 [1 + \varepsilon \sin(\omega t h)] h & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} v(t), \\ z(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad t = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где  $x(t) = \text{col}(\varphi(th), \dot{\varphi}(th))$ ,  $|v(th)| \leq d_v$ ,  $\omega_0 = \pi$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $\varepsilon = 0,01$  и  $h = 0,2$ . Матрицы этих уравнений неизвестны и являются блоками матрицы  $\Delta_t^{(real)}$  для каждого  $t$ . Таким образом, система в каждый момент времени содержит 12 неизвестных параметров, а всего на горизонте  $N = 10$  имеет 120 неизвестных параметров. В качестве центра матричной сферы  $\Delta_t^{(a)}$  возьмем матрицу  $\Delta_t^*$ , которая соответствует линейному осциллятору, т.е. системе (5.1) при  $\varepsilon = 0$ . В эксперименте начальные условия и компоненты вектора управления выбирались случайно на интервале  $[-1, 1]$ , а возмущение также случайно на интервале  $[-d, d]$ . Весовые матрицы начального и терминального состояний равны  $R = 0,1I$  и  $S = 0,05I$  соответственно.

На рис. 2 сплошная кривая соответствует квадрату гарантированной обобщенной  $H_\infty$ -нормы  $\gamma_{g\infty}^*$  в зависимости от уровня возмущения  $d$  в эксперименте, полученной по экспериментальным и априорным данным на горизонте  $N = 10$  при трех экспериментах  $L = 3$  и с радиусами априорной неопределенности  $\rho_t \equiv 0,02$ . Точками отмечена прямая  $\gamma_{g\infty}^{(a)2} = 0,37$ , соответствующая квадрату гарантированной обобщенной  $H_\infty$ -нормы при использовании

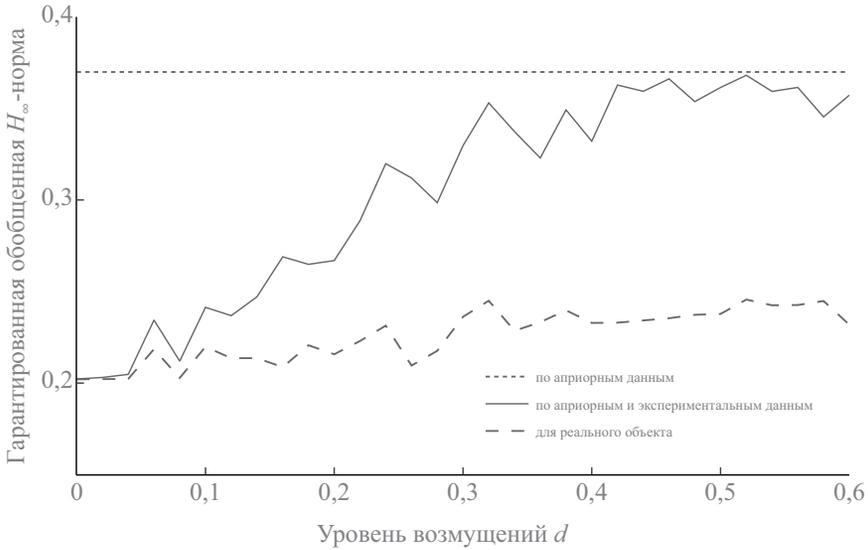


Рис. 2. Гарантированная обобщенная  $H_\infty$ -норма и обобщенная  $H_\infty$ -норма реального объекта при управлении на основе экспериментальных и априорных данных в зависимости от уровня возмущения.

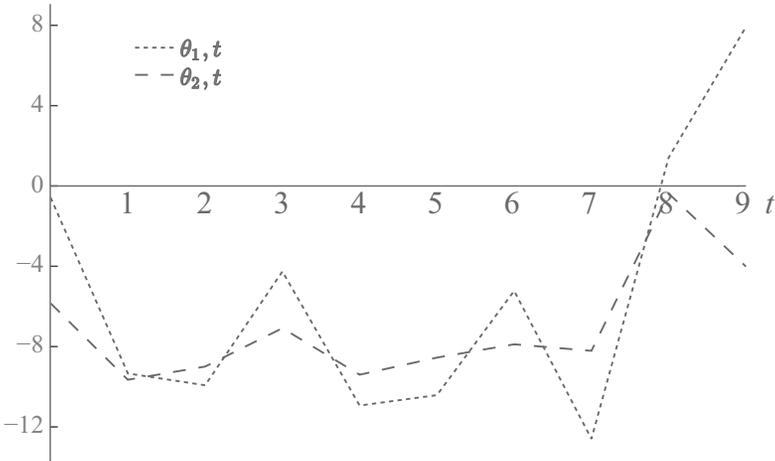


Рис. 3. Компоненты вектора параметров  $\Theta_t^*$  как функции времени.

только априорной информации, т.е. это то значение показателя, которое достигается при традиционном робастном управлении. Пунктирная кривая отвечает квадрату обобщенной  $H_\infty$ -нормы  $\gamma_{real} = \gamma_{g\infty}(\Delta_{[0,N-1]}^{(real)}, \Theta_{[0,N-1]}^*)$  замкнутой системы, состоящей из реального объекта с матрицами параметров  $\Delta_{[0,N-1]}^{(real)}$  (если бы они были известны) и обратных связей с матрицами параметров  $\Theta_{[0,N-1]}^*$ , соответствующих  $\gamma_{g\infty}^*$ . Из рисунка видно, насколько  $\gamma_{g\infty}^{*2}$  в зависимости от  $d$  меньше, чем  $\gamma_{g\infty}^{(a)2}$ , насколько  $\gamma_{g\infty}^{*2}$  превышает  $\gamma_{real}^2$  и насколько последняя, в свою очередь, превышает минимальное значение квадрата

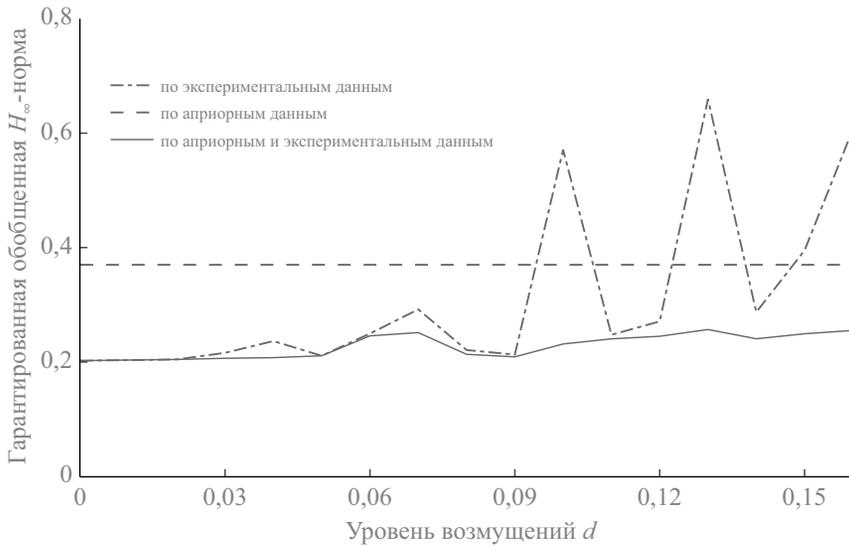


Рис. 4. Гарантированные обобщенные  $H_\infty$ -нормы как функции уровня возмущения для различных видов используемой информации.

обобщенной  $H_\infty$ -нормы реального объекта при оптимальном управлении для полностью известного объекта, равное  $\gamma^2 = 0,202$ . Рост кривой  $\gamma_{g\infty}^*$  с возрастанием  $d$  в эксперименте объясняется соответствующим увеличением размеров матричных эллипсоидов  $\Delta_t^{(p)}$ . На рис. 3 для примера приведены графики изменения во времени компонент вектора параметров управления  $\Theta_t^*$  при  $d = 0,48$ .

На рис. 4 приведены графики квадратов гарантированных обобщенных  $H_\infty$ -норм при использовании экспериментальных и априорных данных (сплошная кривая  $\gamma_{g\infty}^*$ ), только экспериментальных данных (штрих-пунктирная кривая  $\gamma_{g\infty}^{(p)}$ ) и только априорной информации (пунктирная прямая  $\gamma_{g\infty}^{(a)}$ ). Для каждого уровня возмущений в эксперименте первые две нормы вычислялись при одних и тех же экспериментальных данных. Из рис. 4 видно, что  $\gamma_{g\infty}^*$  начиная с некоторого уровня возмущений в эксперименте, значительно меньше  $\gamma_{g\infty}^{(p)}$  и всегда не превышает  $\gamma_{g\infty}^{(a)}$ , которое вычислялось при  $\rho_t \equiv 0,02$ . При управлении, которое получено только по экспериментальным данным без учета априорной информации, при больших ошибках в измерениях матричные эллипсоиды  $\Delta_t^{(p)}$  увеличиваются в размерах и гарантированный уровень гашения возмущений оказывается достаточно большим.

На рис. 5 так же, как на рис. 4, приведены графики квадратов гарантированных обобщенных  $H_\infty$ -норм при использовании экспериментальных и априорных данных (сплошная кривая  $\gamma_{g\infty}^*$ ) и только экспериментальных данных (штрих-пунктирная кривая  $\gamma_{g\infty}^{(p)}$ ) с единственным отличием от эксперимента на рис. 4 – моделирование проведено при радиусах неопределенности в

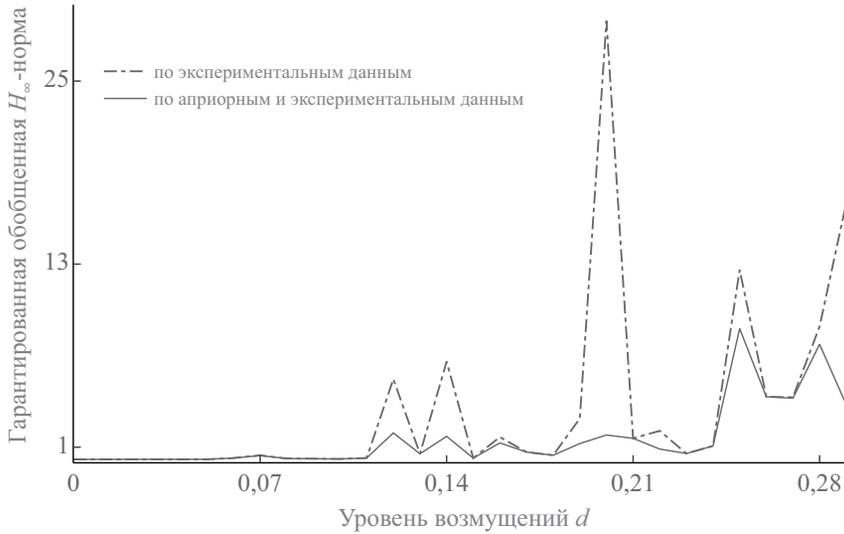


Рис. 5. Гарантированные обобщенные  $H_\infty$ -нормы при использовании экспериментальных и априорных и только экспериментальных данных, когда на основе только априорных данных решения не существует.

априорной информации  $\rho_t \equiv 0,6$ , для которых неравенства (4.6) при  $\mu_t^{(1)} \equiv 0$ ,  $\mu_t^{(2)} \geq 0$  неразрешимы. Рисунок показывает, что в случае недостатка априорной информации, когда область неопределенности приходится выбирать большой и гарантированное значение показателя в этой области оказывается огромным или даже не существует, использование этой информации в сочетании с экспериментальными данными позволяет тем не менее синтезировать системы с лучшим качеством, чем при использовании только экспериментальных данных.

На рис. 6 приведены графики квадратов гарантированных обобщенных  $H_\infty$ -норм при использовании экспериментальных и априорных данных в зависимости от уровня возмущения  $d$  в эксперименте для разного количества экспериментов:  $L = 1$  — штрих-пунктирная кривая,  $L = 3$  — сплошная кривая,  $L = 10$  — пунктирная кривая. Из этого рисунка видно, что, во-первых, даже при одном эксперименте, когда ранговое условие заведомо не выполняется и система неидентифицируема, гарантированный уровень гашения возмущений меньше, чем соответствующий уровень, полученный при робастном управлении по априорной информации; во-вторых, если ошибки в измерениях не очень большие, то при увеличении числа экспериментов уменьшается достигаемый гарантированный уровень гашения возмущений; в-третьих, если ошибки в измерениях достаточно большие, то указанный уровень почти не зависит от числа экспериментов и примерно равен  $\gamma_{g\infty}^{(a)2} = 0,37$ .

На рис. 7 приведены графики квадратов гарантированных обобщенных  $H_\infty$ -норм при использовании экспериментальных и априорных данных в зависимости от уровня возмущения  $d$  в эксперименте для различных значений

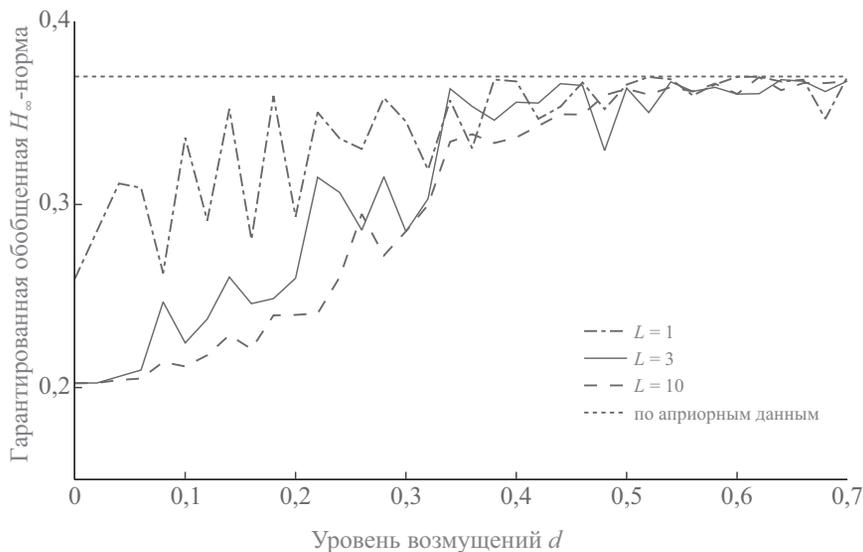


Рис. 6. Гарантированные обобщенные  $H_\infty$ -нормы как функции уровня возмущения для различного числа экспериментов.

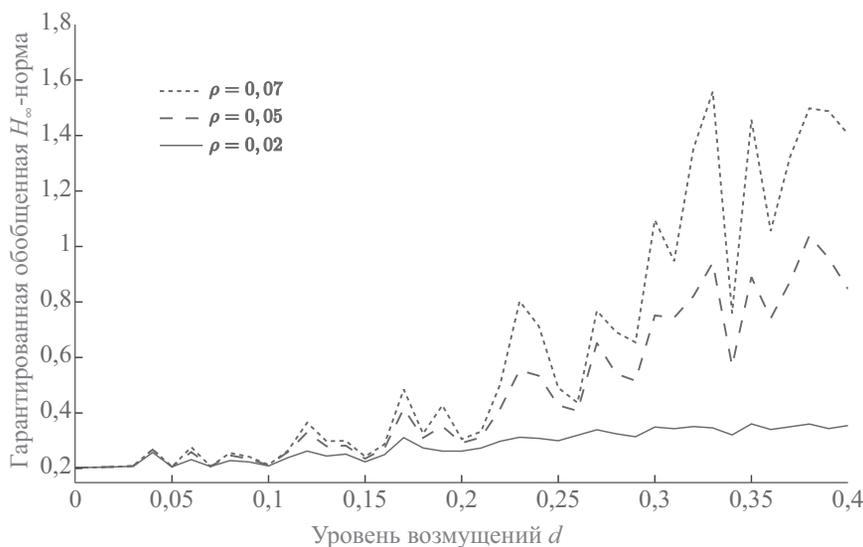


Рис. 7. Гарантированные обобщенные  $H_\infty$ -нормы как функции уровня возмущения при различных радиусах матричных сфер в априорной информации.

радиусов матричных сфер в априорной информации. С увеличением радиуса множество матриц  $\Delta_t$ , согласованных с априорными данными, расширяется и соответственно растет гарантированный уровень гашения возмущений в неопределенной системе.

## 6. Заключение

В статье теоретически обоснован и экспериментально подтвержден новый метод построения оптимальных законов управления линейными нестационарными объектами на конечном горизонте и линейными стационарными объектами на бесконечном горизонте по экспериментальным данным и априорной информации. Целью управления является минимизация обобщенной  $H_\infty$ -нормы замкнутой неопределенной системы, которая, в частности, характеризует уровни гашения внешнего и/или начального возмущений, максимальное отклонение терминального состояния, а в отсутствие внешнего возмущения – максимальное значение квадратичного функционала состояния и управления при неопределенных начальных условиях. Изучена зависимость качества синтезируемой системы управления от различных факторов: уровня возмущения в экспериментах, количества экспериментов, радиусов матричных сфер в априорной информации и др. Показано, что метод остается эффективным даже при небольшом объеме экспериментальных данных, когда не выполняются ни условие неисчезающего возбуждения, ни ранговое условие, необходимые для идентифицируемости объекта.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 2.1.* Запишем неравенство (2.6) в виде

$$\Delta_t \widehat{\Phi}_t \widehat{\Phi}_t^T \Delta_t^T - \widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^T \Delta_t^T - \Delta_t \widehat{\Phi}_t \widetilde{\Phi}_{t+1}^T + \widetilde{\Phi}_{t+1} \widetilde{\Phi}_{t+1}^T - \widehat{\Omega}_t \leq 0$$

и с учетом замены переменных представим его как

$$\widehat{\Delta}_t^{(1)} \Sigma^2 \widehat{\Delta}_t^{(1)T} - \widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} \widehat{\Delta}_t^{(1)T} - \widehat{\Delta}_t^{(1)} \widehat{\Phi}_t^{(1)} \widetilde{\Phi}_{t+1}^T + \widetilde{\Phi}_{t+1} \widetilde{\Phi}_{t+1}^T - \widehat{\Omega}_t \leq 0.$$

Выделяя полный квадрат, получим

$$\left[ \widehat{\Delta}_t^{(1)} - \widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} \Sigma^{-2} \right] \Sigma^2 \left[ \widehat{\Delta}_t^{(1)} - \widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} \Sigma^{-2} \right]^T \leq \Gamma_t,$$

где

$$\Gamma_t = \widehat{\Omega}_t + \widetilde{\Phi}_{t+1} \left[ \widehat{\Phi}_t^{(1)T} \Sigma^{-2} \widehat{\Phi}_t^{(1)} - I \right] \widetilde{\Phi}_{t+1}^T.$$

Подставляя сюда выражение для  $\widetilde{\Phi}_{t+1}$  из (2.10) и учитывая, что  $\widehat{\Phi}_t^{(1)} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} = \Sigma^2$ , получим  $\Gamma_t = \widehat{\Omega}_t \geq 0$ . Вычисляя градиент по  $\widehat{\Delta}_t^{(1)}$  от матричной нормы невязки, т.е. функции  $\text{tr}(\widetilde{\Phi}_{t+1} - \widehat{\Delta}_t^{(1)} \widehat{\Phi}_t^{(1)})^T (\widetilde{\Phi}_{t+1} - \widehat{\Delta}_t^{(1)} \widehat{\Phi}_t^{(1)})$ , и приравнявая его к нулю  $-2\widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} + 2\widehat{\Delta}_t^{(1)} \widehat{\Phi}_t^{(1)} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} = 0$ , выразим оценку  $\Delta_t^{(LS)(1)}$  методом наименьших квадратов неизвестной матрицы  $\Delta_t^{(real)(1)}$  в (2.10) как  $\widehat{\Delta}_t^{(LS)(1)} = \widetilde{\Phi}_{t+1} \widehat{\Phi}_t^{(1)T} \Sigma^{-2}$ .

*Доказательство леммы 3.2.* В силу уравнений (3.1) и (3.5) имеем

$$x^T(t+1)\widehat{x}(t+1) - x^T(t)\widehat{x}(t) = v^T(t)\widehat{z}(t) - z^T(t)\widehat{v}(t).$$

Суммируя эти уравнения по  $t = 0, \dots, N - 1$ , получим

$$x^T(N)S[S^{-1}\hat{x}(N)] + \langle z, \hat{v} \rangle_{l_2} = x^T(0)R^{-1}[R\hat{x}(0)] + \langle v, \hat{z} \rangle_{l_2}.$$

Таким образом,

$$\langle \Gamma_{g\infty}(x(0), v), (S^{-1}\hat{x}(N), \hat{v}) \rangle_{\Xi_2} = \langle (x(0), v), \Gamma_{g\infty}^*(S^{-1}\hat{x}(N), \hat{v}) \rangle_{\Xi_1},$$

что и требовалось доказать.

*Доказательство леммы 3.3.* Так как нормы сопряженных операторов равны, то согласно лемме 3.2 имеем  $\|\Gamma_{g\infty}\| = \|\Gamma_{g\infty}^*\|$ , где норма сопряженного оператора задана в (3.4). Сделаем в (3.5) замену времени  $t = N - 1 - \tau$ , обозначим  $\hat{x}(N - \tau) = x_d(\tau)$ ,  $\hat{v}(N - 1 - \tau) = v_d(\tau)$ ,  $\hat{z}(N - 1 - \tau) = z_d(\tau)$  и придем к уравнениям (3.6), в которых  $\tau$  заменено на  $t$ . Тогда оператор  $\Gamma_{g\infty}^*$  представим как

$$\Gamma_{g\infty}^* : (S^{-1}x_d(0), v_d(t)) \rightarrow (Rx_d(N), z_d(t))$$

и

$$\|\Gamma_{g\infty}^*\| = \sup_{x_d(0), v_d} \left[ \frac{\|z_d\|_{[0, N-1]}^2 + x_d^T(N)Rx_d(N)}{x_d^T(0)S^{-1}x_d(0) + \|v_d\|_{[0, N-1]}^2} \right]^{1/2},$$

что и требовалось доказать.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petersen I.R., Tempo R.* Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // *Automatica*. 2014. V. 50. No. 5. P. 1315–1335.
2. *De Persis C., Tesi P.* Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality and Robustness // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2020. V. 65. No. 3. P. 909–924.
3. *Berberich J., Koch A., Scherer C.W., Allgower F.* Robust data-driven state-feedback design // *Proc. American Control Conference*. 2020. P. 1532–1538.
4. *Nortmann B., Mylvaganam T.* Direct data-driven control of LTV systems // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2023. V. 68. P. 4888–4895.
5. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Data-driven Control via Petersen’s Lemma // *Automatica*. 2022. V. 145. Article 110537.
6. *Petersen I.R.* A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // *Syst. Control Lett.* 1987. V. 8. P. 351–357.
7. *Dörfler F., Tesi P., De Persis C.* On the Certainty-Equivalence Approach to Direct Data-Driven LQR Design // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2023. V. 68. P. 7989–7996.
8. *Waarde H.J., Eising J., Trentelman H.L., Camlibel M.K.* Data Informativity: a New Perspective on Data-Driven Analysis and Control // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2020. V. 65. No. 11. P. 4753–4768.

9. *Waarde H.J., Camlibel M.K., Mesbahi M.* From Noisy Data to Feedback Controllers: Nonconservative Design via a Matrix S-Lemma // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2022. V. 67. No. 1. P. 162–175.
10. *Якубович В.А.* S-процедура в нелинейной теории управления // *Вестн. Ленинград. ун-та. Математика.* 1977. Т. 4. С. 73–93.
11. *Berberich J., Scherer C.W., Allgower F.* Combining Prior Knowledge and Data for Robust Controller Design // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2023. V. 68. No. 8. P. 4618–4633.
12. *Scherer C.W.* “Robust mixed control and linear parameter-varying control with full block scalings” in *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control: SIAM*, 2000. P. 187–207.
13. *Коган М.М., Степанов А.В.* Синтез субоптимальных робастных регуляторов на основе априорных и экспериментальных данных // *АиТ.* 2023. № 8. С. 24–42.
14. *Коган М.М., Степанов А.В.* Синтез обобщенного  $H_\infty$ -субоптимального управления по экспериментальным и априорным данным // *АиТ.* 2024. № 1. С. 3–20.
15. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
16. *Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А.* Синтез обобщенного  $H_\infty$ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // *АиТ.* 2014. № 1. С. 3–22.
17. *Polyak B.T.* Convexity of Quadratic Transformations and Its Use in Control and Optimization // *J. Optim. Theory Appli.* 1998. V. 99. No. 3. P. 553–583.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 12.04.2024

После доработки 28.04.2024

Принята к публикации 30.04.2024